ĐỀ THI VÀO CHUYÊN TOÁN PTNK NĂM 2016

Thời gian làm bài 150 phút

Bài 1. (2, 5 điểm)

a) Giải hệ $\begin{cases} (x-2y)(x+my) = m^2-2m-3 \\ (y-2x)(y+mx) = m^2-2m-3 \end{cases}$ khi $m=-3$ và tìm m để hệ co ít nhất một nghiệm (x_o, y_o) thỏa $x_o > 0, y_o > 0$.

b) Tìm $a \geq 1$ để phương trình $ax^2 + (1-2a)x + 1 - a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Bài 2. (2 điểm) Cho x, y là hai số nguyên dương mà x^2+y^2+10 chia hết cho xy.

a) Chứng minh rằng x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh $k = \dfrac{x^2+y^2+10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Bài 3.(1,5 điểm) Biết $x \geq y \geq z, x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

a) Tính $S = (x-y)^2 + (x-y)(y-z) + (y-z)^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P = |(x-y)(y-z)(z-x)|$.

Bài 4.(3 điểm) Tam giác ABC nhọn có $\angle BAC > 45^o$. Dựng các hình vuông $ABMN, ACPQ$ (M và C khác phía đối với AB; B và Q khác phía đối với AC). AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt đoạn CP tại F.

a) Chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ và tứ giác $EFQN$ nội tiếp.

b) Chứng minh trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNQ cắt nhau tại K (K khác D), các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại J. Chứng minh các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Bài 5. (1 điểm) Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, kí hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_o = n$ và lần lượt tính các số $n_1 = n_o - s(n_o), n_2 = n_1 - s(n_1), ..., n_{i+1} = n_i - s(n_i)$,.... Chứng minh tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16}.14^{17}$.

Hướng dẫn giải

Bài 1. (2, 5 điểm)

a) Giải hệ $\begin{cases} (x-2y)(x+my) = m^2-2m-3 \\ (y-2x)(y+mx) = m^2-2m-3 \end{cases}$ khi $m=-3$ và tìm m để hệ co ít nhất một nghiệm (x_o, y_o) thỏa $x_o > 0, y_o > 0$.

b) Tìm $a \geq 1$ để phương trình $ax^2 + (1-2a)x + 1 - a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Hướng dẫn a) Khi $m=-3$ ta có hệ:
$\begin{cases} (x-2y)(x-3y) = 12 \\ (y-2x)(y-3x) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5xy+6y^2 = 12(1) \\ y^2-5xy+6x^2 = 12(2) \end{cases}$
Lấy (1) - (2) ta có $5(y^2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = y, x = -y$.
Với $x=y$ thế vào (1) ta có $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}, y = \sqrt{6}$ hoặc $x = -\sqrt{6}, y = -\sqrt{6}$.
Với $x=-y$ thế vào (1) ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$. Với $x = 1, y = -1$, với $x=-1, y = 1$.
Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm.
Hệ có thể viết lại $\begin{cases} x^2+(m-2)xy-2my^2 = m^2-2m-3(1) \\ y^2+(m-2)xy-2mx^2 = m^2-2m-3(2) \end{cases}$
Lấy (1) - (2) ta có $(2m+1)(y^2-x^2) = 0$.
Xét $m = \dfrac{-1}{2}$ ta có hệ trở thành: $x^2 - \dfrac{5}{2}xy + y^2 + \dfrac{7}{4} = 0$, có nghiệm $(\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}, 2)$ thỏa đề bài.
Xét $m \neq \dfrac{-1}{2}$ ta có $x=y$ hoặc $x=-y$. Trường hợp $x=-y$ không thỏa đề bài.
Trường hợp $x=y$, thế vào (1) ta có $-(m+1)x^2 = m^2-2m-3 = (m+1)(m-3)$.
Nếu $m=-1$ ta có $(x-2y)(x-y) = 0, (y-2x)(y-x) = 0$ có nghiệm thỏa đề bài, chỉ cần chọn $x=1, y=1$.
Nếu $m \neq -1$ ta có $x^2 = 3-m$ để có nghiệm $x_o = y_o > 0$ thì $m < 3$. Khi đó phương trình có nghiệm $x_0 = \sqrt{3-m}, y_o = \sqrt{3-m}$ thỏa đề bài.
Kết luận $m = \dfrac{-1}{2}, m = -1$ và $m < 3$.
b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Delta = (1-2a)^2 - 4a(1-a) = 8a^2 - 8a + 1 > 0$.

Theo định lý Viete ta có $x_1+x_2=\dfrac{2a-1}{a}$, suy ra $ax_1+ax_2=2a-1$. Suy ra $ax_1=2a-1-ax_2$.
Kết hợp giả thiết ta có $x_2^2+ax_2-2a+1=a^2-a-1 \Leftrightarrow x_2^2+ax_2-a^2-a+2=0 \Leftrightarrow ax_2^2+a^2x_2-a^3-a^2+2a=0$ (1).
Mà x_2 là nghiệm của phương trình nên ta có $ax_2^2+(1-2a)x_2+1-a=0(2)$.
Lấy (1) - (2) ta có $(a^2+2a-1)x_2=a^3+a^2-3a+1$, mà $a\geq 1$ nên $a^2+2a-1\neq 0$, suy ra $x_2=a-1$.
Thế vào phương trình (1) ta có $(a-1)^2+a(a-1)-a^2-a+2=0 \Leftrightarrow a=1, a=3$.
Thử lại ta nhận hai giá trị $a=1, a=3$.

Bài 2. (2 điểm) Cho x, y là hai số nguyên dương mà x^2+y^2+10 chia hết cho xy.

a) Chứng minh rằng x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh $k=\dfrac{x^2+y^2+10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k\geq 12$.

Hướng dẫn a) Giả sử trong hai số x, y có một số chẵn, vì vai trò x, y như nhau nên có thể giả sử x chẵn. Suy ra x^2+y^2+10 chia hết cho 2, suy ra y chẵn. Khi đó x^2+y^2+10 chia hết cho 4, suy ra 10 chia hết cho 4 vô lý. Vậy trong hai số đều là số lẻ.
Đặt $d=(x,y)$, $x=d.x', y=d.y'$ ta có $x^2+y^2+10=d^2(x'^2+y'^2)+10$ chia hết cho $d^2x'y'$. Suy ra 10 chia hết cho d^2. Suy ra $d=1$. Vậy x, y nguyên tố cùng nhau.
b) Đặt $x=2m+1, y=2n+1$, suy ra $k=\dfrac{4(m^2+m+n^2+n+3}{(2m+1)(2n+1)}$, ta có $4, (2m+1).(2n+1)$ nguyên tố cùng nhau. Suy ra $m^2+n^2+m+n+3$ chia hết cho $(2m+1)(2n+1)$. Từ đó ta có k chia hết cho 4.
Chứng minh $k\geq 12$ bằng hai cách.
Cách 1: Ta có $x^2+y^2+10=kxy$.
Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho 3, giả sử x chia hết cho 3. Ta có y^2+10 chia hết cho 3 vô lý vì y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1.
Vậy x, y không chia hết cho 3, suy ra x^2+y^2+10 chia hết cho 3 và $3, xy$ nguyên tố cùng nhau. Do đó k chia hết cho 3.
Do đó k chia hết cho 12, vậy $k\geq 12$.
Cách 2: Xét $k=4$ ta có $x^2+y^2+10=4xy(*) \Leftrightarrow (x-2y)^2=3y^2-10$.

Ta có $(x-2y)^2$ chia 3 dư 0 hoặc 1 mà $3y^2-10$ chia 3 dư 2, nên phương trình (*) không có nghiệm nguyên dương. Xét $k=8$ ta có $x^2+y^2+10=8xy(*) \Leftrightarrow (x-4y)^2=15y^2-10$.
Ta có $(x-4y)^2$ chia 3 dư 0 hoặc 1 mà $15y^2-10$ chia 3 dư 2 nên (**) không có nghiệm nguyên dương.
Vậy $k \geq 12$.

Bài 3.(1,5 điểm) Biết $x \geq y \geq z, x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

a) Tính $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P=|(x-y)(y-z)(z-x)|$.

Hướng dẫn a) Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$. Suy ra $xy+yz+xz=-3$.
Ta có $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2=x^2-2xy+y^2+xy-y^2+yz-xz+y^2-2yz+z^2=x^2+y^2+z^2-yx-yz-xz=9$.
Ta có $(x-y)(y-z) \leq \dfrac{1}{3}((x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2)=3$. Suy ra $P \leq 3|x-z|$.
Ta có $|x-z| \leq \sqrt{2(x^2+z^2)} \leq \sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}=\sqrt{12}$. Suy ra $P \leq 3\sqrt{12}=6\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt{3}, y=0, z=-\sqrt{3}$.
Vậy giá trị lớn nhất của P là $6\sqrt{3}$ khi $x=\sqrt{3}, y=0, z=-\sqrt{3}$

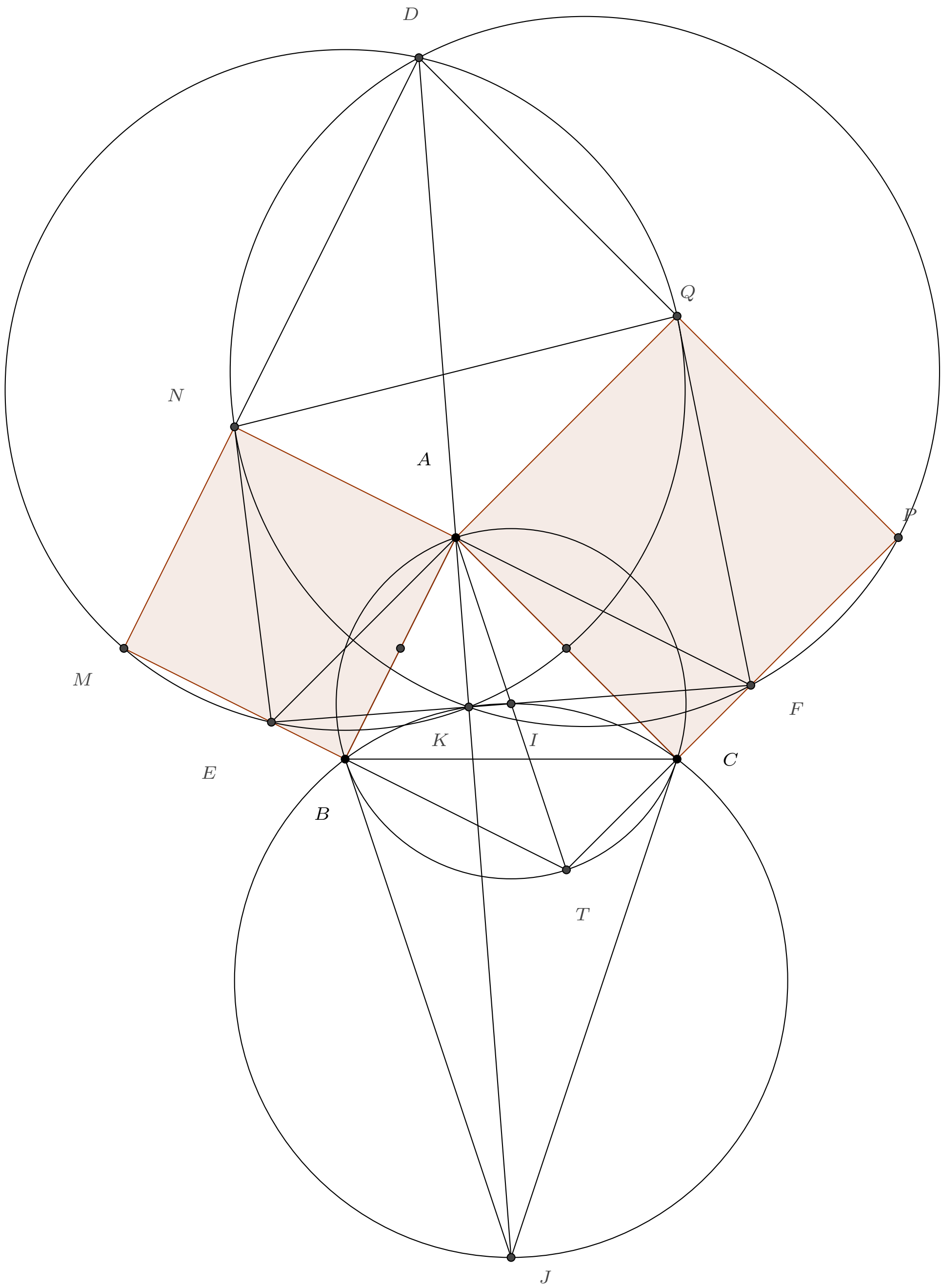
Bài 4.(3 điểm) Tam giác ABC nhọn có $\angle BAC > 45^o$. Dựng các hình vuông $ABMN, ACPQ$ (M và C khác phía đối với AB; B và Q khác phía đối với AC). AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt đoạn CP tại F.

a) Chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ và tứ giác $EFQN$ nội tiếp.

b) Chứng minh trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNQ cắt nhau tại K (K khác D), các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại J. Chứng minh các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Ta có $\angle EAB + \angle BAC = 90^o, \angle FAC + \angle BAC = 90^o$. Suy ra $\angle EAB = \angle FAC$. Mặt khác có $\angle ABE = \angle ACF = 90^o$. Suy ra $\Delta ABE \sim \Delta ACF$. Suy ra $AE.AC = AF.AB$ mà $AC = AQ, AB = AN$. Suy ra $AE.AQ = AN.AF$. Suy ra tứ giác $QNEF$ nội tiếp.
b)Cách 1: Gọi T là giao điểm của MB và CP. Ta có $ABTC$ nội tiếp và AT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt khác ta có $AF||ET, AE||FT$ nên $AETF$ là hình bình hành. Suy ra trung điểm EF

cũng là trung điểm AT. Do đó trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Cách 2: Xét hình thang $AEBF$, gọi X là trung điểm của AB khi đó IX thuộc đường trung bình của hình thang, suy ra $IX||BE$ hay IX vuông góc AB vậy IX là trung trực của đoạn AB. Chứng minh tương tự thì I cũng thuộc trung trực đoạn AC. Vậy I là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC.
c) DA cắt EF tại K' ta có $\angle NFK' = \angle NQA$ (vì $NQFE$ nội tiếp). Mà $\angle NQA = \angle NDA$(vì $AQDN$ nội tiếp). Suy ra $\angle NDA = \angle AFK'$. Suy ra $NDFK'$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta có $DQK'E$ nội tiếp. Do đó K' là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DQM và DPN. Vậy $K' \equiv K$. Suy ra D, A, K thẳng hàng.
Ta có $\angle BKE = \angle EAB = \angle CAF = \angle CKF$. Suy ra $\angle BKC = 180^o - 2\angle BKE = 2(90^o - \angle EAB) = 2\angle BAC = \angle BIC$. Suy ra $BKIC$ nội tiếp. Mà $IBJC$ nội tiếp, suy ra và $JB = JC$ nên $\angle BKJ = \angle CKJ$. Hay KJ là phân giác $\angle BKC$.
Mặt khác $\angle BKA = 180^o - \angle AEB = 180^o - \angle AFC = \angle AKC$. Suy ra tia đối của tia KA cũng là phân giác của $\angle BKC$. Do đó A, K, J thẳng hàng. Vậy 4 điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Bài 5. (1 điểm) Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, kí hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_o = n$ và lần lượt tính các số $n_1 = n_o - s(n_o), n_2 = n_1 - s(n_1), ..., n_{i+1} = n_i - s(n_i)$,.... Chứng minh tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16}.14^{17}$.

Hướng dẫn Ta có $s(n_i) < n_i$, suy ra $n_i - s(n_i) \geq 1$. Suy ra $n_{i+1} \geq 1$. Do đó $n_i \geq 1$ với mọi $i = 1, 2, ...$
Mặt khác $n_{i+1} = n_i - s(n_i) < n_i$ với mọi i. Suy ra $n = n_o > n_1 > n_2 > ... > ....$
Nếu không tồn tại n_k để $n_k = 1$ ta xây dựng được dãy vô hạn các số nguyên dương giảm và nhỏ hơn n (vô lý) vì số các số nhỏ hơn n là bằng $n - 1$.
Vậy tồn tại k sao cho $n_k = 1$.
Với $n = 2^{16}.14^{17} = 2^{33}.7^{17}$, ta có $n_1 = 2^{33}7^{17} - 2^{32}.7^{17} = 2^{32}.7^{17}$.
$n_2 = 2^{31}.7^{17}$.
Tiếp tục ta có $n_{33} = 7^{17}$.
Đặt $m_o = 7^{17}$ ta có $m_1 = 6.7^{16}$, $m_2 = 3.7^{16}, m_3 = 2.7^{16}, m_4 = 7^{16}$. Tương tự ta có $m_8 = 7^{15}$,...,$m_{68} = 7^0 = 1$.
Vậy $k = 33 + 68 = 101$.

Nhận xét

+Lời giải trên chỉ là ý kiến chủ quan, không phải đáp án, được thực hiện trong thời gian ngắn, nếu có sai sót xin góp ý để đính chính qua email nguyentangvu@gmail.com

+ Đề năm nay nhìn chung là khó, độ phức tạp về mặt tính toán cũng nhiều, vì thế sẽ tốn nhiều thời gian khi làm bài.

+ Các câu cho điểm thì ít chỉ có 3a, 1a ý giải hệ, 4a.

+ Các câu còn lại có độ khó cao và tốn nhiều thời gian suy nghĩ.

+ Điểm toán chuyên năm nay chắc sẽ thấp, những bạn làm được 5 điểm cũng phải giỏi và nắm vững kiến thức.

+ Chúc các em may mắn ở các môn sau.